OSNOVNA ŠKOLA

8. RAZRED

Nastavna tema:

TAČKA, PRAVA I RAVAN

REŠENJA – VEŽBANJE

Nivo: SVI

AUTOR: Bogdan Đurić

LEKCIJA:

TAČKA I PRAVA. TAČKA I RAVAN

AUTOR: Bogdan Đurić

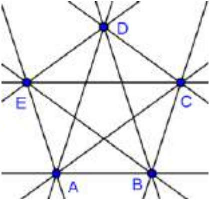
NIVO

2 – DOVOLJAN

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu pravu, pa je broj raznih prava:

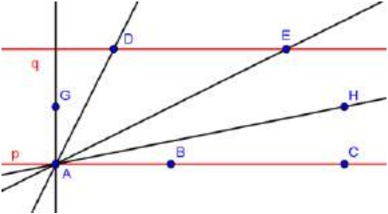


$$\boldsymbol{n_p = 10}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu pravu, pa je broj raznih prava:

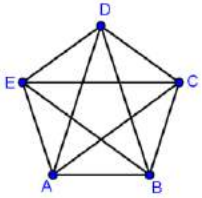


$$n_p = 4$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu duž, pa je broj raznih duži:

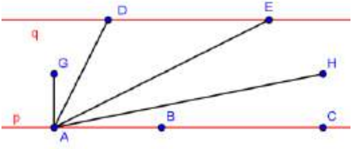


$$n_d = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu duž, pa je broj raznih duži:

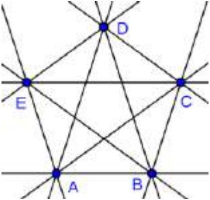


$$n_d = 4$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu polupravu (napom. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$), pa je broj raznih polupravih:



$$n_{pp} = 20$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

3 – DOBAR

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu pravu. Ako je broj datih tačaka n, tada se iz jedne tačke, ka ostalim tačkama, može konstruisati $n-1$ prava, pa je ukupan broj prava:

$$\left.\begin{array}{c} n_p = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} \\ n = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_p = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Temena konveksnog mnogougla su nekolinearne tačke, pa za njih važi sledeće: Dve razne tačke određuju jednu pravu. Ako je broj datih tačaka n, tada se iz jedne tačke, ka ostalim tačkama, može konstruisati $n-1$ prava, pa je ukupan broj prava:

$$\left.\begin{array}{c} n_p = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2} \\ n = 13 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_p = 78$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne prave mogu imati samo jednu presečnu tačku. Ako je broj datih prava n, tada jedna prava sa ostalima ima $n-1$ presečnu tačku, pa je ukupan broj presečnih tačaka:

$$\left.\begin{aligned} n_A &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ n &= 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow n_A = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Temena konveksnog mnogougla su nekolinearne tačke, pa za njih važi sledeće: Dve razne tačke određuju jednu polupravu (napomena: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$). Ako je broj datih tačaka n, tada se iz jedne tačke, ka ostalim tačkama, može konstruisati $n-1$ poluprava, pa je ukupan broj poluprava:

$$\left.\begin{array}{c} n_{pp} = n \cdot (n-1) \\ n = 13 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{pp} = 156$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne tačke određuju jednu polupravu (napomena: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$). Ako je broj datih tačaka n, tada se iz jedne tačke, ka ostalim tačkama, može konstruisati $n-1$ poluprava, pa je ukupan broj poluprava:

$$\left.\begin{array}{c} n_{pp} = n \cdot (n-1) \\ n = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{pp} = 20$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

4 – VRLO DOBAR

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Tri nekolinearne tačke određuju jednu ravan. Ako je broj datih tačaka n, tada se iz jedne tačke, ka ostalim tačkama, može konstruisati $(n-1)\cdot(n-2)$ ravni, pa je ukupan broj ravni:

$$\left.\begin{array}{c} n_{\pi} = \dfrac{n\cdot(n-1)(n-2)}{6} \\ n = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{\pi} = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve razne prave mogu imati samo jednu presečnu tačku. Ako je broj datih prava n, tada je ukupan broj presečnih tačaka $n_A = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Broj duži određenih ovim tačkama je:

$$\left.\begin{array}{r} n_d = \dfrac{n_A \cdot (n_A - 1)}{2} \\ n = 5 \wedge n_A = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_d = 45$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Vitezovi su temena konveksnog mnogougla, a parovi nesusednih vitezova dijagonale tog mnogougla, pa je ukupan broj parova:

$$\left.\begin{aligned} n_2 &= \frac{n \cdot (n-3)}{2} \\ n &= 7 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow n_2 = 14$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Za ravan biramo dva temena konveksnog mnogougla i tačku A, a ako je broj temena n, tada se ovo može uraditi na sledeći broj načina:

$$\left.\begin{aligned} n_\pi &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ n &= 13 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow n_\pi = 78$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Biramo po jednu tačku na svakoj od datih prava. Tada je broj različitih trouglova određenih ovim tačkama:

$$\left.\begin{array}{c} n_3 = n_a \cdot n_b \cdot n_c \\ n_a = 3 \land n_b = 4 \land n_c = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = 60$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Da bi ravan sekla tri paralelne prave, moramo sa svake prave birati po jedni tačku. Tada je broj različitih ravni:

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{n_\pi = n_a \cdot n_b \cdot n_c} \\ \boldsymbol{n_a = 3 \wedge n_b = 4 \wedge n_c = 5} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{n_\pi = 60}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

5 – ODLIČAN

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Možemo birati 2 od n_a tačaka sa prave a i jednu od n_b tačaka sa prave b ili 1 od n_a tačaka sa prave a i 2 od n_b tačaka sa prave b. Tada je broj različitih trouglova:

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{l} n_{21} = \dfrac{n_a \cdot (n_a - 1)}{2} \cdot n_b \\ n_{12} = \dfrac{n_b \cdot (n_b - 1)}{2} \cdot n_a \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = n_{21} + n_{12} \\ n_a = 5 \wedge n_b = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = 135$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Da nisu posvađani sa susedima, moglo bi se formirati $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ trojki. Međutim, zbog posvađanosti sa susedima, ne možemo uzeti u obzir $n(n-3)$ trojki vitezova, pa je ukupan broj mogućih trojki za $n = 7$ vitezova:

$$n_3 = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{6} - n \cdot (n-3) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n_3 = \frac{n \cdot (n-4)(n-5)}{6}$$

$$\Longrightarrow n_3 = 7$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Možemo birati 2 od n_α temena mnogougla u ravni α i jedno od n_β temena mnogougla u ravni β ili obrnuto. Tada je broj različitih ravni određenih ovim temenima:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} n_{21} = \dfrac{n_\alpha \cdot (n_\alpha - 1)}{2} \cdot n_\beta \\ n_{12} = \dfrac{n_\beta \cdot (n_\beta - 1)}{2} \cdot n_\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = n_{21} + n_{12} \\ \qquad n_\alpha = 5 \wedge n_\beta = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = 135$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Možemo birati 2 od n_a tačaka sa prave a i 2 od n_b tačaka sa prave b. Tada je broj različitih četvorouglova:

$$\left.\begin{array}{c} n_4 = \dfrac{n_a \cdot (n_a - 1)}{2} \cdot \dfrac{n_b \cdot (n_b - 1)}{2} \\ n_a = 5 \wedge n_b = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_4 = 150$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Možemo birati 2 od n dečaka i jednu od m devojčica ili 1 od n dečaka i 2 od m devojčica. Tada je broj različitih mešovitih timova:

$$\left.\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{l} n_{21} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot m \\ n_{12} = \dfrac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow n_3 = n_{21} + n_{12} \\ n = 5 \wedge m = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow n_3 = 135\right.$$

AUTOR: Bogdan Đurić

LEKCIJA:

PRAVA I RAVAN. ODNOS DVE PRAVE. DVE RAVNI. ODREĐENOST RAVNI

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

2 – DOVOLJAN

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kako su date prave normalne na ravan π, to znači da su međusobno paralelne. Dve paralelne prave određuju jednu ravan, pa je, za n datih paralelnih prava, broj raznih. njima određenih ravni $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. U konkretnom slučaju, za $n=3$ paralelne prave, broj ravni je:

$$n_{\pi}=3$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Tačka H sa svakom od datih prava određuje po jednu ravan, pa je, za jednu datu tačku i n datih prava, broj raznih, njima određenih ravni n. U konkretnom slučaju, za $n = 7$ prava, broj ravni je:

$$\boldsymbol{n_\pi = 7}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kako su date prave normalne na ravan π, to znači da su međusobno paralelne. Dve paralelne prave određuju dve poluravni (npr. $\overrightarrow{ad}$ i $\overrightarrow{da}$), pa je, za n datih paralelnih prava, broj raznih. njima određenih poluravni $n \cdot (n-1)$. U konkretnom slučaju, za $n = 3$ paralelne prave, broj poluravni je:

$$n_{p\pi} = 6$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kocka ima 6 strana (njih grade po 4 ivice) koje određuju 6 ravni. Parovi dijagonalno paralelnih ivica (npr. AB i HG) određuju još 6 ravni, pa je ukupan broj ravni određenih ivicama kocke:

$$n_{p\pi} = 12$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Prava i ravan mogu biti u sledećim međusobnim položajima:

- Prava u ravni (beskonačno mnogo zajedničkih tačaka)
- Prava prodire ravan (tačno jedna zajednička tačka)
- Prava i ravan paralelne (nemaju zajedničkih tačaka)

Dakle, u ovom slučaju, tačan odgovor je:

Prava i ravan su paralelne.

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve ravni mogu biti u sledećim međusobnim položajima:

- Poklapaju se (beskonačno mnogo zajedničkih tačaka)
- Seku se (tačno jedna zajednička prava)
- Paralelne (nemaju zajedničkih tačaka)

Dakle, u ovom slučaju, tačan odgovor je:

Dve ravni su paralelne.

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve prave mogu biti u sledećim međusobnim položajima:

- Poklapaju se (beskonačno mnogo zajedničkih tačaka)
- Seku se (tačno jedna zajednička tačka)
- Paralelne (nemaju zajedničkih tačaka i postoji ravan koja ih sadrži)
- Mimoilazne (ne postoji ravan koja ih sadrži)

Dakle, u ovom slučaju, tačan odgovor je:

Dve prave su mimoilazne.

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

3 – DOBAR

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kako sve date prave imaju tačno jednu zajedničku tačku, to znači da se svake dve od njih seku. Dve prave koje se seku određuju jednu ravan, pa n datih prava određuju $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ raznih ravni. U ovom slučaju, za $n = 5$, taj broj ravni je:

$$n_\pi = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Dve paralelne prave određuju jednu ravan, pa n datih paralelnih prava određuju maksimalno $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ raznih ravni. U ovom slučaju, za $n = 5$, taj broj ravni je:

$$n_{\pi} = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kako sve date ravni imaju tačno jednu zajedničku tačku, to znači da se svake dve od njih seku. Dve ravni koje se seku određuju jednu presečnu pravu, pa n datih ravni određuju $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ raznih prava. U ovom slučaju, za $n=5$, taj broj prava je:

$$n_p = 10$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Prava u ravni deli tu ravan na dve poluravni, pa n datih prava u jednoj ravni određuju $2n$ raznih poluravni. U ovom slučaju, za $n = 5$, taj broj poluravni je:

$$\boldsymbol{n_{p\pi} = 10}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ravan deli prostor u kom se nalazi na dva poluprostora, pa n datih ravni određuju $2n$ raznih poluprostora. U ovom slučaju, za $n = 5$, taj broj poluprostora je:

$$\boldsymbol{n_{p\Pi} = 10}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Jedna prava u ravni deli tu ravan na dve oblasti. Dve prave koje se seku dele ravan na 4 oblasti. Tri prave koje imaju jednu zajedničku presečnu tačku, dele ravan na 6 oblasti. Dalje, n na ovaj način datih prava određuju $2n$ disjunktnih oblasti, pa je za $n = 5$ taj broj oblasti:

$$\boldsymbol{n_{\sigma} = 10}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Jedna prava u ravni deli tu ravan na dve oblasti. Dve paralelne prave dele ravan na 3 oblasti. Tri paralelne prave dele ravan na 4 oblasti. Dalje, n na ovaj način datih prava određuju $n+1$ disjunktnih oblasti, pa je za $n=5$ taj broj oblasti:

$$\boldsymbol{n_\sigma = 6}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Jedna ravan deli prostor na dve disjunktne oblasti. Dve ravni koje se seku dele prostor na 4 oblasti. Tri ravni koje imaju jednu zajedničku presečnu pravu, dele prostor na 6 oblasti. Dalje, n na ovaj način datih ravni određuju $2n$ disjunktnih oblasti, pa je za $n = 5$ taj broj oblasti:

$$\boldsymbol{n_{\Sigma} = 10}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Jedna ravan deli prostor na dve disjunktne oblasti. Dve paralelne ravni dele prostor na 3 oblasti. Tri paralelne ravni dele prostor na 4 oblasti. Dalje, n na ovaj način datih ravni određuju $n + 1$ disjunktnih oblasti, pa je za $n = 5$ taj broj oblasti:

$$\boldsymbol{n_{\Sigma} = 6}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

4 – VRLO DOBAR

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Jedna prava iz ravni α i jedna tačka iz ravni β određuju jednu ravan. Ako je dato n_p prava u ravni α i n_A tačaka u ravni β, na ovaj način je određeno $n_p \cdot n_A$ raznih ravni, pa je za $n_p = 5$ i $n_A = 6$ taj broj ravni:

$$n_\pi = 30$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kocka ima 3 para paralelnih strana. Ako između svaka dva para paralelnih strana postavimo 1 njima paralelnu ravan koja deli na njih normalne ivice na 2 podudarna dela, na ovaj način ćemo datu kocku podeliti na 8 međusobno podudarnih kockica. Dakle, potreban broj ravni je:

$$\boldsymbol{n_{\pi} = 3}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kvadar ima 3 para paralelnih strana. Ako između svaka dva para paralelnih strana postavimo 1 njima paralelnu ravan koja deli na njih normalne ivice na 2 podudarna dela, na ovaj način ćemo dati kvadar podeliti na 8 međusobno podudarnih kvadara. Dakle, potreban broj ravni je:

$$\boldsymbol{n_{\pi} = 3}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako u odnosu na svaku stranicu trougla postavimo 2 njoj paralelne prave koje dele druge dve stranice na po 3 podudarna dela, na ovaj način ćemo dati trougao podeliti na 9 međusobno podudarnih trouglova. Dakle, potreban broj prava je:

$$\boldsymbol{n_p = 6}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Kocka ima 12 ivica. Svaka njena ivica ima 4 njoj susedne i 3 njoj paralelne ivice, koje ne mogu određivati sa njom mimoilazne prave. Preostale 4 ivice određuju mimoilazne prave, pa svaka ivica sa drugima određuje 4 para mimoilaznih prava. Kako na ovaj način svaki par računamo po dva puta, to je ukupan broj parova:

$$n_m = 24$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

5 – ODLIČAN

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako se n_1 datih ravni seku po jednoj pravi p, tada one dele prostor na $2n_1$ disjunktnih oblasti. Ako n_2 paralelnih ravni seku ovu pravu p, tada one dele svaku od $2n_1$ disjunktnih oblasti na po $n_2 - 1$ disjunktnih delova. To znači da je ukupan broj disjunktnih oblasti $2n_1 \cdot (n_2 - 1)$. Za $n_1 = n_2 = 5$, imamo da je:

$$n_\Sigma = 40$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je n_p broj datih prava, a n_σ broj disjunk. oblasti, tada je:

$$\boldsymbol{n_p = 1 \Longrightarrow n_\sigma = 2 = 1 + 1}$$

$$\boldsymbol{n_p = 2 \Longrightarrow n_\sigma = 4 = 1 + 1 + 2}$$

$$\boldsymbol{n_p = 3 \Longrightarrow n_\sigma = 7 = 1 + 1 + 2 + 3}$$

$$\boldsymbol{n_p = n \Longrightarrow n_\sigma = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow n_\sigma = \frac{n^2 + n + 2}{2}}$$

pa je, za $n_p = 5$, broj oblasti:

$$\boldsymbol{n_\sigma = 16}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je dato n prava koje ispunjavaju date uslove, tada na „krajevima“ svake od njih imamo po jednu polupravu. Svaka poluprava učestvuje u građenju 2 disjunktne otvorene oblasti. Na ovaj način svaku disjunktnu oblast računamo po 2 puta, pa je ukupan broj otvorenih disjunktnih oblasti $n_\sigma = 2n$. Za $n = 5$, imamo da je:

$$\boldsymbol{n_\sigma = 10}$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je dato n prava koje ispunjavaju uslove zadatka, tada je ukupan broj disjunktnih oblasti $\frac{n^2+n+2}{2}$, a ukupan broj otvorenih disjunktnih oblasti $2n$, pa je broj disjunktnih zatvorenih oblasti $n_\sigma = \frac{n^2+n+2}{2} - 2n = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$. Za $n = 5$, imamo da je:

$$n_\sigma = 6$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je n_k broj datih kružnica, a n_σ broj disjunktnih zatvorenih oblasti, tada je:

$$
\begin{aligned}
&n_k = 1 \Longrightarrow n_\sigma = 1 = 1^2 \\
&n_k = 2 \Longrightarrow n_\sigma = 4 = 2^2 \\
&n_k = 3 \Longrightarrow n_\sigma = 9 = 3^2 \\
&\vdots \\
&n_k = n \Longrightarrow n_\sigma = n^2
\end{aligned}
$$

pa je, za $n_k = 5$, broj oblasti:

$$n_\sigma = 25$$

AUTOR: Bogdan Đurić

LEKCIJA:

ORTOGONALNA PROJEKCIJA NA RAVAN

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

2 – DOVOLJAN

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $AA_1^2 = AB^2 - BA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $AB = 5\ cm$ i $A_1B = 4\ cm$, je:

$$AA_1^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow AA_1^2 = 9$$

$$\Longrightarrow AA_1 = 3\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $A_1B^2 = AB^2 - AA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $AB = 5\ cm$ i $AA_1 = 3\ cm$, je:

$$A_1B^2 = 5^2 - 3^2 \Longrightarrow A_1B^2 = 16$$
$$\Longrightarrow A_1B = 4\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $AB^2 = A_1B^2 + AA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $A_1B = 4\ cm$ i $AA_1 = 3\ cm$, je:

$$AB^2 = 4^2 + 3^2 \Longrightarrow AB^2 = 25$$
$$\Longrightarrow AB = 5\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $AA_1^2 = AB^2 - BA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $AB = 5\ cm$ i $A_1B = 4\ cm$, je $AA_1 = 3\ cm$, pa je:

$$\mathcal{O} = AA_1 + A_1B + BA \Longrightarrow \mathcal{O} = 12\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $A_1B^2 = AB^2 - AA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $AB = 5\ cm$ i $AA_1 = 3\ cm$, je $A_1B = 4\ cm$, pa je:

$$\mathcal{O} = AA_1 + A_1B + BA \Longrightarrow \mathcal{O} = 12\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $AB^2 = A_1B^2 + AA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $A_1B = 4\ cm$ i $AA_1 = 3\ cm$, je $AB = 5\ cm$, pa je:

$$\mathcal{O} = AA_1 + A_1B + BA \Longrightarrow \mathcal{O} = 12\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $AA_1^2 = AB^2 - BA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $AB = 5\ cm$ i $A_1B = 4\ cm$, je $AA_1 = 3\ cm$, pa je:

$$P = \frac{AA_1 \cdot A_1B}{2} \Longrightarrow P = 6\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Zbog svojstva ortogonalne projekcije, trougao AA_1B je pravougli, sa pravim uglom kod temena A_1, pa za njega važi Pitagorina teorema, tj. $A_1B^2 = AB^2 - AA_1^2$. U konkretnom slučaju, za $AB = 5\ cm$ i $AA_1 = 3\ cm$, je $A_1B = 4\ cm$, pa je:

$$P = \frac{AA_1 \cdot A_1B}{2} \Longrightarrow P = 6\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

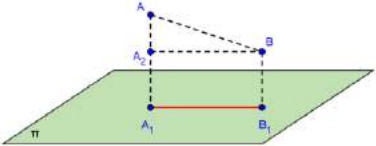
NIVO

3 – DOBAR

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $A_2B^2 = AB^2 - AA_2^2$. Za date podatke je:

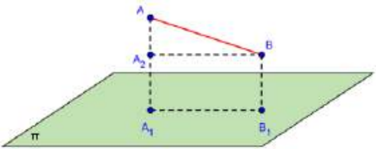


$$A_1B_1^2 = 5^2 - 3^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A_1B_1^2 = 16$$
$$\Longrightarrow A_1B_1 = 4\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AB^2 = A_2B^2 + AA_2^2$. Za date podatke je:

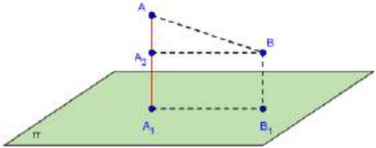


$$AB^2 = 4^2 + 3^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AB^2 = 25$$
$$\Longrightarrow AB = 5\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$. Za date podatke je:

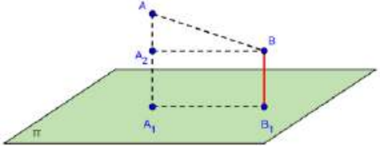


$$AA_2^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AA_2 = 3\ cm$$
$$\Longrightarrow AA_1 = 7\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$. Za date podatke je:

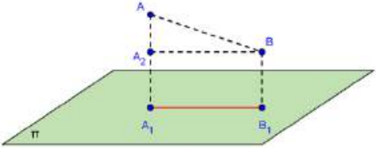


$$AA_2^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AA_2 = 3\ cm$$
$$\Longrightarrow BB_1 = 4\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $A_2B^2 = AB^2 - AA_2^2$. Za date podatke je:

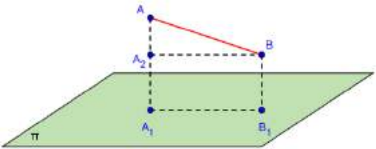


$$A_1B_1^2 = 5^2 - 3^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A_1B_1 = 4\ cm$$
$$\Longrightarrow O = 20\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AB^2 = A_2B^2 + AA_2^2$. Za date podatke je:

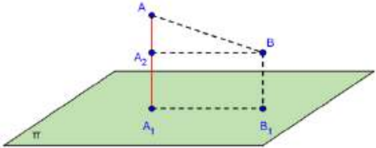


$$AB^2 = 4^2 + 3^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AB = 5\ cm$$
$$\Longrightarrow O = 20\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$. Za date podatke je:

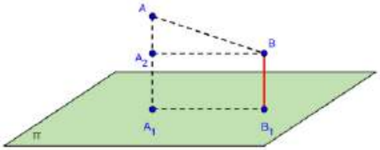


$$AA_2^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AA_2 = 3\ cm$$
$$\Longrightarrow AA_1 = 7\ cm$$
$$\Longrightarrow O = 20\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$. Za date podatke je:

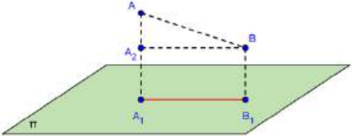


$$AA_2^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AA_2 = 3\ cm$$
$$\Longrightarrow BB_1 = 4\ cm$$
$$\Longrightarrow O = 20\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $A_2B^2 = AB^2 - AA_2^2$. Za date podatke je:



$$A_1B_1^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1B_1 = 4\ cm$$

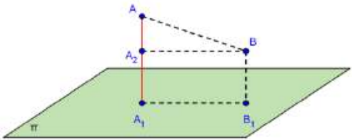
$$\Rightarrow P = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1$$

$$\Rightarrow P = 22\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$. Za date podatke je:



$$AA_2^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AA_2 = 3\ cm$$

$$\Longrightarrow AA_1 = 7\ cm$$

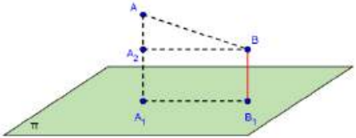
$$\Longrightarrow P = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1$$

$$\Longrightarrow P = 22\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Ako je $A_2B \parallel A_1B_1$, tada je trougao AA_2B pravougli, sa pravim uglom kod temena A_2, $AA_2 = AA_1 - BB_1$ i $A_2B = A_1B_1$, pa je $AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$. Za date podatke je:



$$AA_2^2 = 5^2 - 4^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AA_2 = 3\ cm$$
$$\Longrightarrow BB_1 = 4\ cm$$
$$\Longrightarrow P = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1$$
$$\Longrightarrow P = 22\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

4 – VRLO DOBAR

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (2. stav – UU) i oba trougla su karakteristična $(\varphi = 30°)$, pa je:

$$\left.\begin{aligned} A_1C &= \frac{1}{2}AC \\ B_1C &= \frac{1}{2}BC \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$$

$$\Longrightarrow A_1B_1 = 5\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (2. stav – UU) i oba trougla su karakteristična $(\varphi = 60°)$, pa je:

$$\left.\begin{aligned} A_1C &= \frac{1}{2}AC \\ B_1C &= \frac{1}{2}BC \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$$

$$\Longrightarrow A_1B_1 = 5\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (2. stav – UU) i oba trougla su karakteristična $(\varphi = 45°)$, pa je:

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1C \cdot \sqrt{2} \\ BC &= B_1C \cdot \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow AB = A_1B_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow AB = 10\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je ΔAB_1C_1 pravougli ($\sphericalangle C_1 = 90°$), pa je:

$$\left.\begin{matrix} BC \parallel B_1C_1 \Longrightarrow \begin{cases} B_1C_1 = 3\ cm \\ AC_1 = \sqrt{7}\ cm \end{cases} \\ AB_1^2 = AC_1^2 + B_1C_1^2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB_1^2 = 16$$

$$\Longrightarrow AB_1 = 4\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (2. stav – UU) i oba trougla su karakteristična $(\varphi = 45°)$, pa je:

$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta AA_1C} &= \frac{A_1C^2}{2} \\ P_{\Delta BB_1C} &= \frac{B_1C^2}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A_1C = 3\sqrt{2}\ cm \\ B_1C = 2\sqrt{2}\ cm \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_{\Delta BB_1C} = 4\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da su trouglovi ABC i AB_1B karakteristični $(\alpha = 60°, \varphi = 30°)$, pa je:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = 60° \Longrightarrow AB = 2AC = 2\sqrt{3}\ cm \\ \varphi = 60° \Longrightarrow AB_1 = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB_1 = 3\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

NIVO

5 – ODLIČAN

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je ΔBC_1C karakterističan $(\varphi = 60°)$ i da je $AB \cong BC_1$ (kvadrat), pa je:

$$\left.\begin{array}{c} P_{ABC_1D_1} = 4\ cm^2 \Longrightarrow AB = BC_1 = 2\ cm \\ \varphi = 60° \Longrightarrow BC = 2BC_1 = 4\ cm \\ P_{ABCD} = AB \cdot BC \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_{ABCD} = 8\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je ΔBC_1C karakterističan $(\varphi = 60°)$ i da je $AB \cong BC_1$ (kvadrat), pa je:

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c} d = 2\sqrt{6}\ cm \\ d = a\sqrt{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = BC_1 = 2\sqrt{3}\ cm \\ \varphi = 60° \Longrightarrow BC = 2BC_1 = 4\sqrt{3}\ cm \\ P_{ABCD} = AB \cdot BC \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_{ABCD} = 24\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da su trouglovi ABC i AB_1B karakteristični $(\alpha = 60°, \varphi = 30°)$, pa je:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi = 60° \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} AB = 2BB_1 \\ AB_1 = BB_1 \cdot \sqrt{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow P_{\Delta AB_1B} = \dfrac{BB_1^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ \alpha = 60° \Longrightarrow AB = 2AC \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow BB_1 = 2\ cm \wedge AB = 4\ cm$$
$$\Longrightarrow AC = 2\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je ΔAB_1C_1 pravougli ($\sphericalangle C_1 = 90°$), pa je:

$$\left.\begin{array}{c} B_1C_1^2 = AB_1^2 - AC_1^2 \Longrightarrow B_1C_1 = 3\ cm \\ BC \parallel B_1C_1 \Longrightarrow BC = B_1C_1 \\ AC^2 = AB^2 - BC^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow BC = 3\ cm \wedge AC = 4\ cm \wedge P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

$$\Longrightarrow P = 6\ cm^2$$

AUTOR: Bogdan Đurić

REŠENJE

Na snovu crteža i podataka lako se uočava da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (2. stav – UU) i oba trougla su karakteristična $(\varphi = 45°)$, pa je:

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1C \cdot \sqrt{2} \\ BC &= B_1C \cdot \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} AB &= A_1B_1 \cdot \sqrt{2} \\ \mathcal{O} &= 2A_1B_1 + A_1B_1 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}\right.$$

$$\Longrightarrow A_1B_1 = 5\sqrt{2}\ cm$$

$$\Longrightarrow AB = 10\ cm$$

AUTOR: Bogdan Đurić